

LA MATEMATICA DEI QUADRATI MAGICI

di Maria Luisa Caldelli e Laura Giovannoni

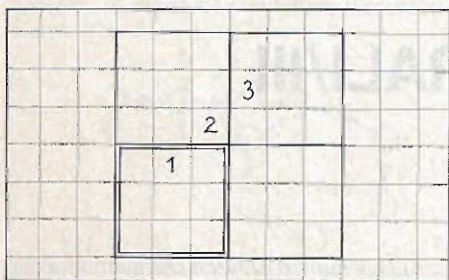
Un *quadrato magico di ordine n* (breve-mente: *Quamag n*) è un quadrato formato da n^2 numeri naturali disposti in n righe ed n colonne in modo tale che la somma di ogni riga, di ogni colonna, di ogni diagonale sia la stessa (tale valore è detto *costante magica*).

Ecco due esempi di *Quamag n*, per $n=3$ ed $n=5$ rispettivamente, e con costanti magiche 24 e 70.

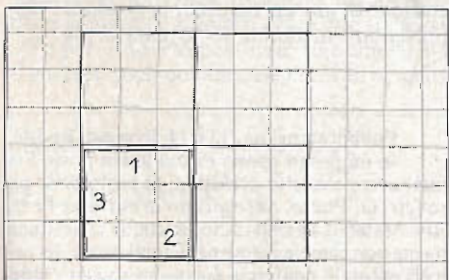
11	4	9			18	25	2	9	16
6	8	10			24	6	8	15	17
7	12	5			5	7	14	21	23
					11	13	20	22	4
					12	19	26	3	10

Se si vogliono costruire *Quamag n* per valori dispari di n , esistono facili regole. Eccone una. Prendiamo per semplicità il caso che gli n^2 numeri siano tra loro successivi a partire da 1. Vediamo i casi $n=3$ ed $n=5$; la generalizzazione è immediata.

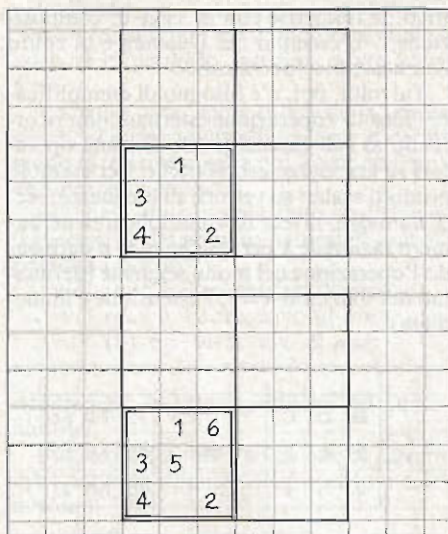
Quamag 3. Si parte da un quadrato 6×6 sul quale si scrivono i valori consecutivi 1, 2, 3 a partire dalla casella al centro della riga prima del quadrato inferiore sinistro (quello nel quale apparirà il *Quamag 3*) verso l'alto a destra.



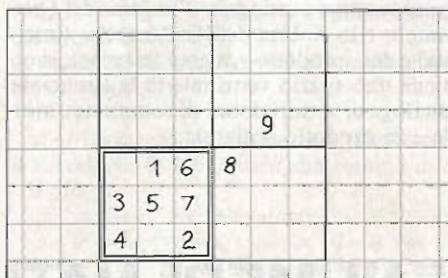
Si procede così: il valore 2, scritto fuori del quadrato che ci interessa, va riportato sul quadrato in basso a sinistra nella stessa casella (una sorta di «traslazione» di quadrati); lo stesso si fa con il numero 3.



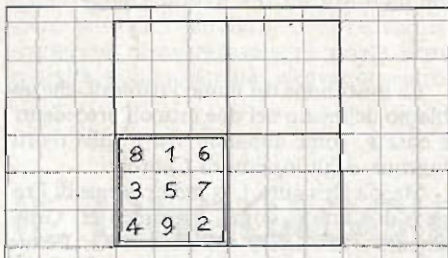
Poiché il valore più alto scritto finora è 3, si riparte con 4, a iniziare dalla casella immediatamente sotto a quella che contiene il 3.



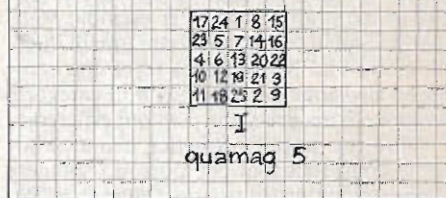
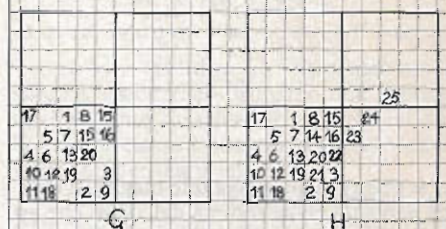
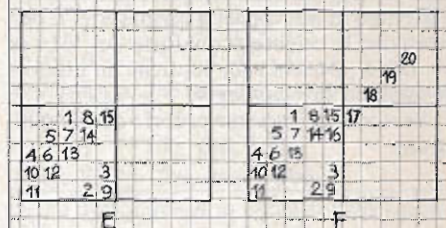
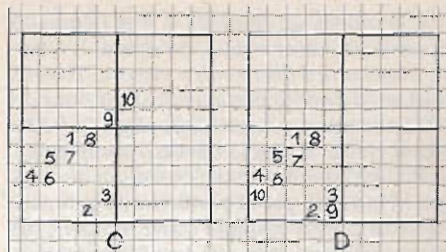
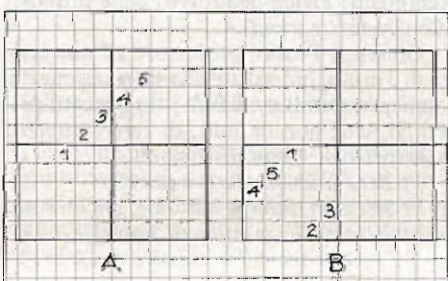
Si finisce a 6. Si ricomincia con 7, la casella sotto il 6, e poi con 8 e 9 verso destra in alto.



Si traslano 8 e 9 sul quadrato in basso a sinistra e si ha il *Quamag 3*.



Ripetiamo ora tutti i passaggi per il *Quamag 5* ottenuto in modo analogo, senza alcun commento.

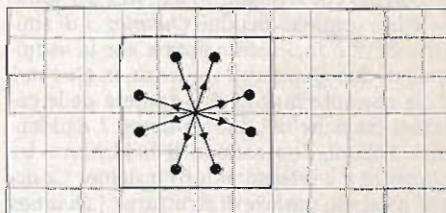


Passiamo ora ai *Quamag n* con n pari. Finché $n=4$, c'è un metodo semplice; ma la sua generalizzazione a casi qualsiasi è incredibilmente complessa. Vediamo il caso $n=4$.

Si scrivono i numeri da 1 a 16 a forma di quadrato così:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Si considera la trasformazione indicata dal seguente grafico.



La si esegue:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

E si ottiene un *Quamag 4*. Per i *Quamag n*, per n pari diverso da 4, si rinvia a: I. Gherzi, *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli, Milano (si può far riferimento all'edizione del 1972 ancora in commercio), pagg. 265-321. Ma si tratta di regole davvero complesse.

Perché i quadrati magici si dicono... magici? Non solo per la particolarità aritmetica detta (stessa costante come somma), ma perché nell'antichità essi costituirono materiale di studio accanito da parte di mistici che vedevano in essi capacità divinatorie. È ben noto che la celebre acquaforte del 1514 di A. Dürer, *Melencolia*, contiene un notevole esempio di *Quamag 4*.

Se si prende in esame proprio questo quadrato:

		16	3	2	13
		5	10	11	8
		9	6	7	12
		4	15	14	1

ci si accorge che la costante magica si ottiene non solo come somma dei valori che appaiono in righe, colonne e diagonali, ma anche in molti altri modi. Per esempio sommando i quattro valori estremi, quelli interni, e così via. Nasce allora tutta una complessa divisione dei *Quamag n* in categorie sempre più magiche, che però ci eviteremo.

Oltre che motivi aritmetici, ben altre sono le considerazioni che possono spingere l'interesse didattico verso i *Quamag n*. Per esempio, considerazioni strutturali, o generalizzazioni delle idee di operazioni aritmetiche, o indagini sulle trasformazioni geometriche dei quadrati che ne conservano la magicità. Tutto ciò come occasione stimolante e divertente per fare matematica entusiasmando ed attraendo.

Cominciamo col definire l'«addizione» tra *Quamag n* (per un dato n). Diamo la definizione seguente per $n=3$, ma il lettore estenderà la definizione ad n qualsiasi.

a	b	c		a'	b'	c'		a+a'	b+b'	c+c'
d	e	f	⊕	d'	e'	f'	=	d+d'	e+e'	f+f'
g	h	i		g'	h'	i'		g+g'	h+h'	i+i'

Diremo che il quadrato a destra del segno \oplus è la «somma» dei due *Quamag 3* di sinistra. Si può facilmente notare che la «somma» di due *Quamag 3* è ancora un *Quamag 3* (la costante magica è la somma delle costanti magiche dei due *Quamag 3* «addendi»). Quindi, l'operazione di «addizione» tra *Quamag n* è interna al loro insieme. Cosicché ha senso parlare di struttura ($\{Quamag n\}, \oplus$).

È facile verificare che vale per \oplus la proprietà associativa; che il quadrato formato di soli zeri è l'elemento neutro additivo; cosicché si può parlare di monoide. Ma non è escluso che si superi la richiesta iniziale secondo la quale i *Quamag n* sono formati solo da numeri naturali; se si ammette di poter fare uso di interi (relativi), si può giungere al *Quamag n* «inverso additivo» di un dato *Quamag n*; si ottiene cambiando il segno di ciascun numero in ciascuna casella, di mo-

do che la «somma» tra un *Quamag n* ed il suo inverso additivo dà l'elemento neutro. Siamo così di fronte ad un gruppo formato di *Quamag n* (per n fissato) dotato di un'operazione (binaria interna): l'«addizione» tra *Quamag n*. Sembra piuttosto limitativo, nella pratica didattica, all'interno del tema 7 dei «Programmi ministeriali del '79», proporre come soli esempi di strutture di gruppo, gli interi con $+$, i razionali con $+$, i razionali senza zero con \cdot ; o, in campo geometrico, le isometrie con la legge di composizione... L'esempio dei *Quamag* è di solito ben accetto e fantasioso.

Talvolta, poi, c'è bisogno di esemplificare l'idea di «operazione esterna», non ricorrendo ai soli classici prodotti come operatori su grandezze geometriche, per esempio prodotti scalari su vettori, su lunghezze, ecc. Si immagini invece di «moltiplicare» un numero razionale k per un *Quamag n* definendo l'operazione nel modo seguente (definiamo nel solo caso $n=3$; l'estensione è immediata):

		a	b	c				ka	kb	kc
k	⊗	d	e	f	=			kd	ke	kf
		g	h	i				kg	kh	ki

Quel che si ottiene è un nuovo *Quamag n* la cui costante è quella precedente moltiplicata per k (per motivi ovvi).

Se il lettore crede, può verificare che se si prende come «sostegno» l'insieme dei *Quamag n* e lo si dota dell'«addizione» (interna) e del «prodotto scalare» (esterno), si ottiene uno spazio vettoriale (è la situazione analoga ai vettori dotati di somma vettoriale e di prodotto scalare).

ERRATA-CORRIGE

Nell'articolo delle stesse autrici, pubblicato sul n. 14 della Rivista, a pag. 58, righe 2 e 3 dal basso, c'è un refuso tipografico: si legga «accartocciamento» invece di «accorciamento».

È chiaro che, da un punto di vista strettamente didattico, poco importa che le denominazioni di queste strutture emergano e diventino effettiva competenza dei ragazzi delle medie. Quel che conta è che «analogie strutturali» tra strutture di tipo essenzialmente diverso a prima vista, emergano, come richiesto diffusamente ed esplicitamente nei Programmi. Per far ciò è bene disporre di esempi notevoli, diversi, molteplici che non sempre la fantasia e l'inventiva dell'insegnante sono pronte a produrre. Quello dei *Quamag n* è un campo notevole e ricco, assai poco sfruttato; non si tratta che di un espediente, di un esempio in grado, però, per le sue caratteristiche peculiari, di esercitare un influsso notevole.

Maria Luisa Caldelli
Laura Giovannoni

(Mathesis Bologna per la Scuola Media)

Bibliografia

Oltre al già citato e prezioso testo di Gherzi, si può consultare:

S. Odell - K. Kelsey, *Enigmi, rompicapi e giochi matematici*, Newton Compton, Roma, 1982.

Applicazioni didattiche dei *Quamag* si trovano in:

B. D'Amore, *Il libro di matematica*, Cappelli, Bologna 1981, distribuite, a seconda dell'argomento che si vuol far emergere, nei 3 volumi.

I NUMERI NATURALI/III

di Giuseppe Festa

La trattazione dei numeri naturali, che abbiamo delineato nei due articoli precedenti¹ è basata, come abbiamo visto, sulla teoria ingenua degli insiemi di Cantor.

Ma già altri autori, contemporanei di Frege e di Cantor, come il polacco H. Grassmann (1809-1877) e l'italiano G. Peano (1858-1932), avevano affrontato il problema, per altra via, e cioè per via assiomatica, ad imitazione della sistemazione della geometria euclidea, nella quale, da alcuni concetti primitivi, si deducono poi, mediante un procedimento logico-deduttivo, delle proposizioni vere (teoremi).

Giuseppe Peano, professore all'università di Torino, procedette alla sistemazione dei numeri naturali mediante i tre concetti primitivi, cioè non definiti, di zero², numero e successivo, e cinque assiomi.

- 1) Zero è un numero naturale.
- 2) Se x è un numero naturale, anche il suo successivo x' è un numero naturale.
- 3) Lo zero non è il successivo di alcun numero naturale.

4) Due numeri naturali che hanno successivi uguali sono uguali³.

5) Principio di induzione matematica⁴: se una proprietà appartiene allo zero ed appartiene al successivo di ogni numero naturale, allora appartiene a tutti i numeri naturali.

Ora che abbiamo chiaro il concetto di successione di numeri naturali, la possiamo rappresentare mediante lo schema di fig. 1:

¹ Pubblicati nei nn. 12 e 14 di questa Rivista.

² In un primo tempo Peano aveva posto l'unità, come concetto primitivo, al posto dello zero (cfr. G. Peano, *Sul concetto di numero*, I e II, Riv. Matem., I, 1891). Ciò, anche se concettualmente non cambia niente nella fondazione dei numeri naturali, conferma ancora una volta l'induzione se considerare lo zero un numero naturale.

³ Cioè se due numeri naturali sono diversi, hanno sempre successivi diversi.

⁴ Questo principio è dovuto a Maurolico (1494-1575).